

& GETAL & RUIMTE

A



Noordhoff Uitgevers

Legenda

1 Voorkennis

Kennis van enkele onderwerpen uit de onderbouw of uit een voorgaand hoofdstuk die je paraat moet hebben.

02 Oriëntatie-opgave

Opgave waarmee je je oriënteert op de theorie erna.

3 Gewone opgave

Na de theorie ga je oefenen met de gewone opgaven.

R4 Reflectie-opgave

In een reflectie-opgave kijk je nog eens terug op een voorgaand probleem.

A5 Afsluitende opgave

De afsluitende opgaven geven het beoogde beheersingsniveau aan.

E6 Extra opgave

Opgaven waarmee je extra wordt uitgedaagd.

Route-aanduiding

1 Basisroute

2 Middenroute

3 Uitdagende route

NB De symbolen van de route-aanduiding kunnen in combinaties voorkomen.

1 Opgaven zonder route-aanduiding

In de Diagnostische toets en in de Gemengde opgaven hebben opgaven geen route-aanduiding.

[▶ GR] Verwijzing naar een module van de GR-handleiding.

[▶ WERKBLAD] Verwijzing naar een werkblad.

Inhoud

1	Tabellen en grafieken	6	3	Lineaire verbanden	104
	Beginopdracht De Triathlon van Maastricht	8		Beginopdracht Draf en galop	106
	Voorkennis Procenten	9		Voorkennis Haakjes wegwerken en vergelijkingen oplossen	107
1.1	Rekenen met procenten en verhoudingen	11	3.1	Lineaire formules	109
1.2	Maatsystemen	22	3.2	Lineaire formules vergelijken	117
1.3	Omgaan met tabellen	31	3.3	Lineaire formules opstellen	126
1.4	Informatie in grafieken	41	3.4	Lineaire vergelijkingen met twee variabelen	136
	Eindopdracht RUN Winschoten	49		Eindopdracht Man en paard	141
	Diagnostische toets	50		Diagnostische toets	142
2	De statistische cyclus	52	4	Handig tellen	144
	Beginopdracht Elektrisch rijden	54		Beginopdracht Spelbord ontwerp	146
	Voorkennis Centrummaten en frequentietabellen	55		Voorkennis Teldiagrammen	147
2.1	De onderzoeksvraag	57	4.1	Regels bij telproblemen	148
2.2	Data verzamelen	66	4.2	Permutaties en combinaties	156
2.3	Centrum- en spreidingsmaten	72	4.3	Allerlei telproblemen	165
2.4	Representatie van data	80		Eindopdracht Cirkelvormig spelbord	177
2.5	Conclusies trekken	91		Diagnostische toets	178
	Eindopdracht Nederlands energieverbruik	101			
	Diagnostische toets	102		Gemengde opgaven	180
				Formuleblad	203
				Overzicht GR-modules	204
				Overzicht routes	205
				Trefwoordenregister	209
				Verantwoording	211



4

Handig tellen

Wat leer je?

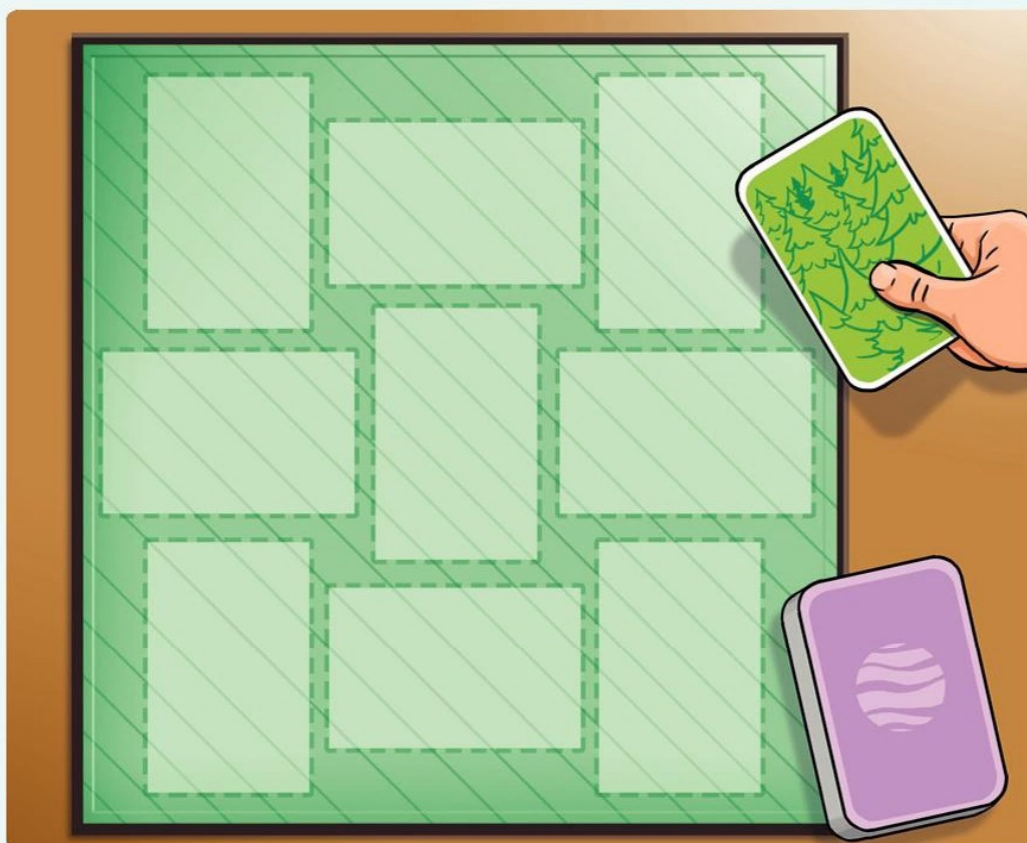
- De vermenigvuldigingsregel en somregel gebruiken bij telproblemen.
- Wat permutaties, faculteiten en combinaties zijn en hoe je deze gebruikt.
- Hoe je aan de slag gaat bij lastige telproblemen.



Beginopdracht Spelbord ontwerp

Sommige bordspellen worden op den duur minder leuk omdat er weinig variatie is in het spelbord. Er zijn spellenmakers die dit probleem proberen op te lossen door een spelbord te maken dat je op veel manieren kunt combineren.

Een voorbeeld is het onderstaande spelbord, dat uit negen vakken bestaat waarin je een kaart kunt leggen.



Ter voorbereiding van het spel worden 9 verschillende kaarten op dit spelbord neergelegd. Elke kaart kan maar op één manier in een vak gelegd worden.

- Hoeveel verschillende opstellingen zijn er mogelijk?

Om voor meer afwisseling te zorgen, besluit de spellenmaker ook de achterkant van de kaarten te bedrukken. Elke kaart kan nu op twee manieren in een vak gelegd worden.

- Hoeveel verschillende opstellingen zijn er dan mogelijk?

Daarnaast besluit de spellenmaker om een nieuwe kaart toe te voegen die ook aan twee kanten is bedrukt. Bij het neerleggen van de kaarten blijft er één kaart over.

- Hoeveel extra opstellingen zijn er nu mogelijk?

Voorkennis Teldiagrammen

Theorie A Boomdiagram en wegediagram

Bij garage Stuurman is de Toyota Auris verkrijgbaar met een benzine, een hybride of een elektrische motor. Verder kan gekozen worden uit de kleuren zwart, groen en blauw. De auto wordt tot slot geleverd met lichtmetalen velgen of stalen velgen. Met het boomdiagram in figuur 4.1 krijg je een overzicht van alle mogelijkheden.

Soms is het handig om in plaats van een boomdiagram een wegediagram te maken. Voordelen van wegediagrammen zijn dat ze snel te tekenen zijn en dat de bijbehorende berekening eenvoudig uit het diagram is af te leiden. Hieronder zie je het wegediagram bij de situatie van de Toyota Auris.

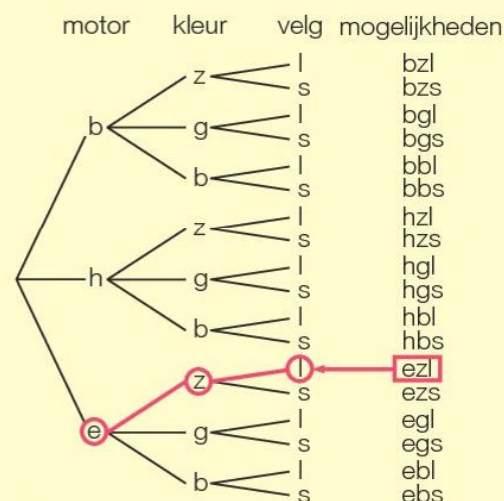


figuur 4.2

De rode route hoort bij de keuze voor een elektrische motor, de kleur zwart en lichtmetalen velgen.

Het totale aantal mogelijkheden bereken je als volgt.

$$\text{aantal} = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$$



figuur 4.1

- 1** Linda gaat met school op reis naar het buitenland. In haar tas zitten drie spijkerbroeken en vijf T-shirts. Ze trekt elke dag een spijkerbroek en een T-shirt aan.

- a** Op hoeveel manieren kan Linda zich hiermee kleden?
b Tijdens de reis koopt ze er een spijkerbroek en twee T-shirts bij.
 Met hoeveel neemt het aantal mogelijkheden hierdoor toe?

- 2** In een bos zijn drie wandelroutes aangelegd: geel, groen en blauw. Je kunt de routes maar in één richting bewandelen. Iets verderop komen de drie routes bij elkaar. Een wandelaar kan dan kiezen om over te stappen op een andere route. Verderop gebeurt dat weer.

- a** Hoeveel verschillende mogelijke wandelingen zijn er in totaal?
b De boswachter besluit om tijdens het broedseizoen het eerste deel van de gele route verboden terrein te maken.
 Met hoeveel neemt het aantal mogelijke wandelingen daardoor af?

4.1 Regels bij telproblemen

01
☐◎*

In een restaurant kan Annette kiezen uit het twee- of driegangendiner. Bij een tweegangendiner hoort geen nagerecht. Zie de menukaart hiernaast voor alle opties.

- Hoeveel verschillende keuzes voor haar menu heeft Annette bij een tweegangendiner? En bij een driegangendiner?
- Hoeveel keuzes voor haar menu heeft Annette in totaal?



Theorie A De vermenigvuldigingsregel en de somregel

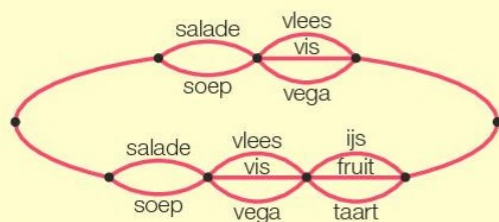
In opgave 1 werd gevraagd hoeveel keuzes Annette kan maken bij het samenstellen van haar menu. Haar keuzemogelijkheden voor het driegangendiner zijn overzichtelijk te presenteren in een wegendiagram.



figuur 4.3

Om het wegendiagram te doorlopen kies je een eerste gerecht *en* een tweede gerecht *en* een derde gerecht. Daarom gebruik je de **vermenigvuldigingsregel**. Je vermenigvuldigt de opeenvolgende aantallen keuzemogelijkheden. Aan het wegendiagram kun je zien dat ze $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ verschillende keuzes voor het driegangendiner heeft.

In opgave 1 had Annette de keuze uit een twee- of driegangendiner. Daarbij hoort het volgende wegendiagram.



figuur 4.4

In dit wegendiagram zijn twee verschillende situaties te onderscheiden. Je kiest voor een tweegangendiner *of* je kiest voor een driegangendiner. In deze situatie gebruik je behalve de vermenigvuldigingsregel ook de **somregel**. Bij de somregel tel je het aantal mogelijkheden van de verschillende situaties bij elkaar op.

Zo krijg je het totale aantal keuzemogelijkheden:
aantal = $2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 3 = 24$.

Vuistregel

In een situatie waar je *en* kunt gebruiken, vermenigvuldig je.

Vuistregel

In een situatie waar je *of* kunt gebruiken, tel je op.

Voorbeeld

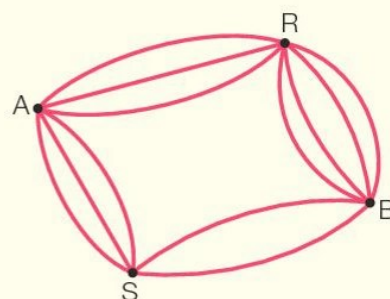
Hoeveel routes zijn er in het diagram van A naar B?

Aanpak

van A naar B via R of via S

Uitwerking

$$\text{aantal} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 18$$



figuur 4.5

2
☐ ⊙ *

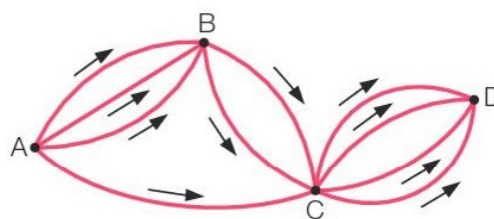
Tussen de plaatsen P en Q stroomt een rivier die bij M en N kan worden overgestoken. Op hoeveel manieren kun je van P naar Q?



figuur 4.6

3
☐

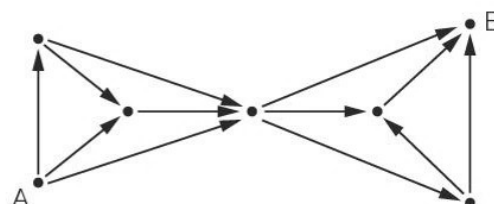
Zie het wegendiagram in figuur 4.7. Op hoeveel manieren kun je van A naar D?



figuur 4.7

E4
☐ ⊙ *

Zie figuur 4.8. Op hoeveel manieren kun je van A naar B als je steeds de pijlen volgt?



figuur 4.8

5
☐ ⊙

Op een boekenplank staan acht Duitse, elf Engelse en vijf Franse boeken.

- Caroline leest van deze boeken eerst een Duits, dan een Engels en ten slotte een Frans boek. Hoeveel mogelijke drietallen zijn er?
- Hoeveel mogelijke tweetallen zijn er voor Caroline als ze twee boeken leest, waarvan alleen het eerste boek Duits is.



6
□ ⊙ *

Een hoofdstuk uit een wiskundeboek bestaat uit vijf paragrafen. Om het proefwerk over dit hoofdstuk te maken, gebruikt de docent een computerprogramma. Dit programma kiest eerst bij paragraaf 1 willekeurig één opgave uit acht beschikbare opgaven. Daarna kiest het programma één opgave bij paragraaf 2, dan één bij paragraaf 3, enzovoort. Zie de tabel.

PROEFWERKOPGAVEN

paragraaf	1	2	3	4	5
aantal beschikbare opgaven	8	5	7	3	11

- Hoeveel verschillende proefwerken kan de computer leveren?
- Nadat de leraar het proefwerk voor klas 4Ha heeft samengesteld, gaat hij dat ook doen voor klas 4Hb.
Hoeveel proefwerken kan de computer leveren als alle opgaven verschillen van die van klas 4Ha?

7
□ ⊙ *

Woonwarenhuis Comfi verkoopt houten kasten van het type KD. Deze zijn er in de breedtematen 40 cm, 60 cm en 80 cm. De kasten zijn in de kleuren wit, zwart, rood en bruin verkrijgbaar. Elke kast heeft een deur van hout, matglas of helder glas, waarbij de houten deuren leverbaar zijn in de kleuren wit, zwart, rood en groen. Hoeveel kasten van het type KD kun je samenstellen?

Een wegendiagram kan helpen om een overzicht te krijgen.

A8
□ ⊙ *

In tapasrestaurant Mediterana hebben ze tapas gebaseerd op de landen Spanje, Italië en Portugal. Voor elk land heb je de keuze uit 15 tapas met keuze uit vlees, vis en veganistische gerechten. De verdeling zie je in de tabel.

Coen gaat met zijn vrienden bij Mediterana eten. Ze hebben afgesproken de eerste ronde Spaanse tapas te eten, de tweede ronde Italiaanse tapas en de laatste ronde tapas uit Portugal. Coen mag elke ronde een van de tapas uitkiezen. Hoeveel keuzes heeft Coen als hij

- drie vleestapas wil kiezen
- een Italiaans visgerecht wil en verder twee vlees tapas
- drie vlees of drie vis of drie veganistische tapas wil
- een veganistische tapa en twee vis tapas wil?

	vlees	vis	vegan
Spaans	8	4	3
Italiaans	5	7	3
Portugees	4	7	4



A9

De RDW is de Nederlandse overheidsdienst die de registratie van gemotoriseerde voertuigen verzorgt. Dat gaat met behulp van een kenteken, dat is een unieke cijfer- en lettercombinatie die op de voor- en achterkant van een gemotoriseerd voertuig moet worden bevestigd. De RDW bepaalt hoeveel letters en cijfers op de kentekens moeten staan en in welke volgorde. Elke paar jaar wordt een nieuwe serie kentekens in gebruik genomen. Zie de tabel hiernaast.

a Hoeveel verschillende kentekens waren er in de eerste serie mogelijk?

In 1965 nam de RDW een nieuwe serie in gebruik en in 1973 weer.

b Hoeveel kentekens kon de RDW in totaal uitgeven vóór 1973?

Vanaf de vierde serie gebruikt de RDW geen klinkers meer in de kentekens. De letters C en Q gebruikt de RDW ook niet, omdat deze letters te veel op een 0 lijken.

c Hoeveel verschillende kentekens waren er mogelijk in serie vijf?

In serie 7 en 8 werden voor het eerst drie letters achter elkaar op het kenteken gezet. Toen werden ook de volgende combinaties verboden: GVD, KKK, NSB, PKK, PSV en TBS.

d Hoeveel verschillende kentekens waren er mogelijk in serie 7 en 8 samen?

Daarna werden ook de lettercombinaties PVV, SGP en VVD verboden.

e Hoeveel meer kentekens zitten er in serie 11 vergeleken met serie 10?

f Hoeveel kentekens met de letters RDW (in deze volgorde en zonder streepjes) zijn er in totaal mogelijk in de eerste 11 series?

Serie	Jaartal	Combinatie
1	1951	XX-99-99
2	1965	99-99-XX
3	1973	99-XX-99
4	1978	XX-99-XX
5	1991	XX-XX-99
6	1999	99-XX-XX
7	2005	99-XXX-9
8	2009	9-XXX-99
9	2006	XX-999-X
10	2008	X-999-XX
11	2015	XXX-99-X

X = letter, 9 = cijfer

Volgens de RDW zijn de klinkers:
A, E, I, O, U en Y.

O10

Drie vrienden spelen een spel waarbij elke speler mag kiezen uit één van acht verschillende spelkarakters.

Hoeveel situaties zijn mogelijk wanneer

a elke speler een verschillend spelkarakter moet kiezen

b spelkarakters vaker gekozen mogen worden?



Theorie B Met of zonder herhaling

Het aantal rondwandelingen van A via B naar A terug in figuur 4.9 is $5 \cdot 5 = 25$.

Je gaat er dan vanuit dat je op de terugweg dezelfde weg mag kiezen als op de heenweg.

Wil je terug niet dezelfde weg nemen als heen, dan is het aantal $5 \cdot 4 = 20$.

Het is bij telproblemen belangrijk je af te vragen of **herhalingen** zijn toegestaan.



figuur 4.9

Zonder herhaling

In opgave 10 kozen 3 spelers uit 8 verschillende karakters. Als karakters niet vaker gekozen mogen worden, heb je te maken met een situatie zonder herhaling.

Het aantal manieren om de karakters te verdelen is

$$\text{aantal} = \overset{8}{\uparrow} \times \overset{7}{\uparrow} \times \overset{6}{\uparrow} = 336$$

De eerste speler kiest uit 8 karakters.

Daarna kiest de tweede speler uit 7 karakters.

Ten slotte kiest de derde speler uit 6 karakters.

Met herhaling

Als karakters wel vaker gekozen mogen worden, heb je te maken met een situatie met herhaling.

Het aantal manieren om de karakters te verdelen is

$$\text{aantal} = \overset{8}{\uparrow} \times \overset{8}{\uparrow} \times \overset{8}{\uparrow} = 512$$

De eerste speler kiest uit 8 karakters.

De tweede speler kiest ook uit 8 karakters.

De derde speler kiest ook uit 8 karakters.

Voorbeeld

Een bedrijf laat een nieuwe website maken. De achtergrond van de website moet bestaan uit drie gekleurde horizontale banen. Voor de kleur van de banen wordt gekozen uit rood, geel en blauw.

Hoeveel mogelijke achtergronden voor de website zijn er als

- a alle banen een verschillende kleur hebben
- b twee aan elkaar grenzende banen niet dezelfde kleur mogen hebben?

Uitwerking

a aantal = $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

b aantal = $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$

$\uparrow$ Voor de derde baan zijn weer twee kleuren mogelijk.

11 In een bedrijf krijgt elk artikel een code. Bij het coderen gebruikt men de letters o, p, q, r, s en t .

- a Hoeveel drielettercodes zijn mogelijk als
 - elke letter maar één keer gebruikt mag worden
 - elke letter ook vaker gebruikt mag worden?
- b Hoeveel vierlettercodes zijn mogelijk waarbij niet twee dezelfde letters naast elkaar staan?
- c Het bedrijf gebruikt per artikel uitsluitend een drielettercode waarbij herhalingen zijn toegestaan of een vierlettercode waarbij herhalingen niet zijn toegestaan.
Hoeveel codes zijn mogelijk?

Verschillende soorten codes

drielettercodes

met herhaling

bijvoorbeeld $s p p$

zonder herhaling

bijvoorbeeld $s p t$

vierlettercodes

met herhaling

bijvoorbeeld $q t o t$

zonder herhaling

bijvoorbeeld $p r t o$

12 Bij een uitwisseling maakt een groep van acht Nederlandse en tien Franse leerlingen een wandeling door Lille. Eén leerling maakt foto's, één leerling maakt een verslag en één leerling bepaalt de route.

Op hoeveel manieren zijn drie leerlingen aan te wijzen als

- a een Franse leerling de route bepaalt en het verder niet uitmaakt
- b een Franse leerling de route bepaalt en Nederlandse leerlingen de foto's en het verslag maken
- c de foto's en het verslag niet allebei door Franse leerlingen en niet allebei door Nederlandse leerlingen worden gemaakt?



13 Hoeveel routes zijn er in de figuur hiernaast als je begint en eindigt in A en zowel L als R wilt bezoeken, waarbij je elke weg maar één keer mag gebruiken?



figuur 4.10

A14 Landenvlaggen zijn een symbool voor nationale eenheid. Ze zeggen vaak wat over het land en zijn geschiedenis. Veel landen hebben een vlag met drie verticale banen.

In deze opgave beperken we ons tot de kleuren zwart, wit, blauw, rood, groen, geel en oranje.

- a Hoeveel vlaggen met drie verticale banen zijn met deze kleuren te vormen? Twee aan elkaar grenzende banen hebben verschillende kleuren.
- b Hoeveel vlaggen met drie verticale banen zijn te vormen als alle kleuren verschillen?

De vlag van Denemarken bestaat uit een kruis met vier vlakken.

- c Op hoeveel manieren is dit patroon te kleuren als het kruis een andere kleur heeft dan elk van de vier vlakken, waarbij de vier vlakken van kleur mogen verschillen?



A15
□ ⊙ *

Marlies organiseert een filmavond voor haar vriendinnen. Op deze avond worden drie films gedraaid van verschillende genres uit de film-top-25. In de tabel zie je hoe vaak elk genre in de top-25 voorkomt.

Hoeveel mogelijkheden zijn er om de avond te vullen als

- a** ze eerst naar een tekenfilm kijken, dan naar een comedy en als laatste naar een horrorfilm
- b** ze eerst naar een comedy en als laatste naar een drama kijken
- c** als ze naar een drama, een comedy en een horrorfilm kijken, waarbij in elk geval de horrorfilm als eerste wordt bekeken?

DE FILM-TOP-25

genre	aantal
drama	4
comedy	5
actie	7
horror	4
romantiek	3
tekenfilm	2

Matthijs organiseert ook een filmavond waarop naar drie verschillende films uit dezelfde top-25 wordt gekeken.

- d** Hoeveel mogelijkheden zijn er om eerst een horrorfilm, vervolgens een actiefilm en ten slotte weer een horrorfilm te zien?

A16
□ ⊙ *

In deze opgave gaat het om getallen van vier cijfers, waarin alleen maar de cijfers 3, 4, 5, 6, 7 en 8 voorkomen.

Hoeveel van die getallen zijn er in het geval

- a** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden
- b** elk cijfer maar één keer gebruikt mag worden en het getal groter dan 6000 moet zijn
- c** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden
- d** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal tussen 6000 en 6500 moet liggen
- e** elk cijfer meer dan één keer gebruikt mag worden en het getal kleiner dan 6500 moet zijn?

A17
□ ⊙ *

Roel ontwerpt een spel waarbij de speler vier keer met één dobbelsteen gooit. Er zijn drie situaties die punten opleveren.

- 1** Alle vier de ogen aantallen zijn verschillend.
- 2** Er is geen enkele keer 6 ogen voorgekomen.
- 3** De dobbelsteen viel nooit twee worpen achter elkaar op hetzelfde ogen aantal.

Roel wil dat een situatie die vaker voorkomt, minder punten oplevert dan een situatie die minder vaak voorkomt. Bereken welke van de drie situaties het meeste en welke manier het minste punten waard is.



E18
*

Rosalin schrijft getallen van vijf cijfers op die alleen bestaan uit de cijfers 1, 2 en 3. Ook wil zij dat cijfers die naast elkaar staan precies 1 verschillen. Hoeveel getallen kan Rosalin maximaal opschrijven?

Terugblik

De vermenigvuldigings- en somregel

Om te zien of je bij een telprobleem moet vermenigvuldigen of optellen kun je letten op de woorden *en* en *of*. Als vuistregel moet je bij *en* vermenigvuldigen en bij *of* optellen.

Bij twijfel kan een wegendiagram uitkomst bieden.

In de situatie hiernaast kun je direct van A naar C *of* eerst naar B *en* dan naar C. Dus het aantal routes van A naar C is $3 + 2 \cdot 2 = 7$.



Met of zonder herhaling

Let op of herhalingen zijn toegestaan.

Een schaakclub kiest elk kwartaal uit dezelfde 12 leden welke speler de wedstrijd op bord 1 mag spelen. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor een kalenderjaar?

Het aantal mogelijkheden is $12 \cdot 12 \cdot 12 \cdot 12$, want bij elk kwartaal zijn er 12 mogelijkheden.

De twaalf leden van de schaakclub kiezen uit hun midden een team van vier spelers. De eerst gekozen speler speelt aan bord 1, de tweede aan bord 2, enzovoort.

Hoeveel teams kunnen zo gekozen worden?

Het aantal teams is $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$, want herhalingen zijn niet toegestaan.

Telproblemen uitwerken

Bij eenvoudige telproblemen ligt de berekening vaak voor de hand.

Maak je getallen van vier cijfers waarbij je de cijfers 1, 2, 3, 4 en 9 mag gebruiken en zijn herhalingen niet toegestaan, dan krijg je
aantal = $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Wanneer een situatie minder eenvoudig is, is het belangrijk het aantal keuzemogelijkheden goed te overdenken voor je de berekening maakt.

Maak je getallen van vier cijfers die tussen de 4000 en 4400 liggen, waarbij je de cijfers 1, 2, 3, 4 en 9 mag gebruiken, dan bereken je het aantal mogelijke getallen als volgt.

Het eerste cijfer is een 4. Je hebt dus maar 1 keuze.

Het tweede cijfer is een 1, 2 of 3. Je hebt dus 3 keuzes.

Dus het aantal mogelijke getallen is $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 = 75$.

4.2 Permutaties en combinaties



Een groep van acht vrienden gaat een weekend kamperen. Eén van hen reserveert de camping, een ander regelt het vervoer en een derde doet de inkopen.

- a Op hoeveel manieren kunnen deze drie taken verdeeld worden?
- b Op hoeveel manieren kunnen acht verschillende taken over deze acht vrienden verdeeld worden?

Theorie A Permutaties en faculteiten

Voor het organiseren van een feestavond melden zich acht leerlingen aan. We noemen ze A, B, C, D, E, F, G en H. Uit deze acht leerlingen worden er drie gekozen: de eerste zorgt voor de drank, de tweede voor de hapjes en de derde voor de muziek.

We vragen ons af op hoeveel manieren de drie leerlingen gekozen kunnen worden. Het antwoord volgt uit de vermenigvuldigingsregel. Het aantal manieren is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Een mogelijk verdeling is BDF. We noemen BDF een **rangschikking** van drie leerlingen uit acht leerlingen. Een ander woord voor rangschikking is **permutatie**.

Dus het aantal permutaties van 3 uit 8 is $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Bij een permutatie heb je te maken met een situatie zonder herhaling.

Het aantal permutaties van 3 uit 8, dus het aantal rangschikkingen van drie dingen die je uit acht dingen kiest, is $8 \cdot 7 \cdot 6$.

Het aantal permutaties van 4 uit 10 is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. En het aantal permutaties van 10 uit 10 is $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

De notatie voor dit product is $10!$ (spreek uit: 10 faculteit).

We zeggen kortweg: het aantal permutaties van tien dingen is $10!$.

Het aantal permutaties van n dingen, dus het aantal rangschikkingen van n dingen is $n!$.

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$$

De GR heeft opties waarmee je faculteiten en aantallen permutaties kunt berekenen.

- Op de TI krijg je ! en nPr in het math-KANS-menu of via de functietoets f2.
- Op de Casio krijg je ! en nPr in het OPTN-PROB-menu.
- Op de HP krijg je Factorieel en Permutatie in het werksetmenu  Wisk. Kies vervolgens Kans.

Voorbeeld

Aan een hardloophwedstrijd doen zeven atleten mee.

- a Op hoeveel manieren kunnen de gouden, de zilveren en de bronzen medaille bij deze atleten terecht komen?
- b In hoeveel volgorden kunnen de zeven atleten de finish passeren?

Uitwerking

- a aantal = $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$
- b aantal = $7! = 5040$



20
□ ⊙ *

- a Simone heeft twaalf bordspellen. Ze stelt een top-5 samen. Op hoeveel manieren kan dat?
- b Bij een spellentoernooi staan 56 genummerde stoelen. Er komen 23 spelers de zaal binnen. Elke speler neemt plaats op een stoel. Op hoeveel manieren kan dat?
- c Voor een spelavond nemen zes vriendinnen ieder een verschillend bordspel mee. Ze zullen elk spel één keer spelen. Hoeveel volgorden zijn mogelijk?



21
□ ⊙ *

- Martin is de pincode van zijn bankpas vergeten, maar hij weet nog wel dat daarin de cijfers 2, 5, 8 en 9 voorkomen.
- a Hoeveel pincodes zijn er met deze cijfers?
 - b Hoeveel van deze pincodes beginnen met 5?

22
□ ⊙ *

Luus heeft een muziekplaylist gemaakt met haar tien favoriete nummers. De totale speelduur van de playlist is 28 minuten en 12 seconden. Ze luistert altijd op shuffle, de tien nummers worden dan in willekeurige volgorde afgespeeld. Bereken hoeveel jaar Luus nodig zou hebben om de playlist op alle mogelijke verschillende volgordes achter elkaar te beluisteren.

A23
□ ⊙ *

- De selectie van het eerste team van volleybalvereniging Avanti bestaat uit negen spelers.
- a Bij het begin van de competitie wordt een foto van de selectie gemaakt. De fotograaf zet hiertoe de spelers op een rij. Hoeveel rijen zijn mogelijk?
 - b Op hoeveel manieren kun je een aanvoerder en een reserveaanvoerder kiezen?
 - c Voor de wedstrijd tegen Smash deelt de trainer de shirts met de rugnummers 1 tot en met 6 uit. Op hoeveel manieren kan dat?

E24
□ ⊙ *

- Een bedrijf gebruikt codes met de letters a , b , c , d , e en f . Bedenk een vraag waarbij er
- a $6!$ codes zijn
 - b 6^4 codes zijn
 - c $6 \cdot 5 \cdot 4$ codes zijn
 - d 6^3 codes zijn.

Marit gaat vier verschillende kazen kopen voor een kaasproeverij. Bij de kaasboer heeft ze keuze uit 12 soorten kaas. Ze wil een kaasmenu samenstellen, waarbij ze de kazen één voor één opdient.

a Hoeveel verschillende kaasmenu's kan ze samenstellen?

Marit besluit de kazen niet één voor één op te dienen, maar gelijktijdig te serveren. Hierdoor heeft ze minder verschillende mogelijkheden bij het serveren van de kazen.

b Licht dit toe.

Theorie B Combinaties

Na een schoolfeest maken drie leerlingen de zaal schoon. De leerlingen Annelies, Bert, Casper, Daan en Evelien stellen zich beschikbaar.

Op hoeveel manieren is uit deze vijf leerlingen een schoonmaakploeg van drie leerlingen te vormen?

Het voor de hand liggende antwoord $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ is niet goed.

Je moet er rekening mee houden dat de schoonmaakploeg ABC

(Annelies, Bert en Casper) dezelfde ploeg is als bijvoorbeeld BAC. Binnen de schoonmaakploeg is de volgorde niet van belang, dus de ploegen ABC, ACB, BAC, BCA, CAB en CBA zijn allemaal dezelfde schoonmaakploeg.

Voor drie leerlingen in een schoonmaakploeg betekent dit telkens $3! = 6$ permutaties die bij één schoonmaakploeg horen. Zie de figuur hiernaast.

Omdat de volgorde binnen de ploeg niet van belang is, komen er van de $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ mogelijke drietallen telkens $3! = 6$ op hetzelfde neer. Het aantal mogelijke schoonmaakploegen is dus

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{60}{6} = 10.$$

Is bij het kiezen van drie dingen uit vijf dingen de volgorde *niet* van belang, zoals bij de schoonmaakploeg, dan spreken we van het aantal **combinaties** van 3 uit 5. Het aantal combinaties van 3 uit 5 noteren we als $\binom{5}{3}$. Spreek uit: vijf boven drie.

Het aantal combinaties van 3 uit 5 noteer je als $\binom{5}{3}$. Dit is het aantal manieren om 3 dingen te kiezen uit 5 dingen waarbij de volgorde niet van belang is.

Let op het verschil met permutaties, waarbij de volgorde van de gekozen dingen wel van belang is.

ALLE MOGELIJKE SCHOONMAAKPLOEGEN

1	ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA	←
2	ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA	←
3	ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA	←
4	ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA	←
5	ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA	←
6	ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA	←
7	BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB	←
8	BCE	BEC	CBE	CEB	ECB	ECB	←
9	BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB	←
10	CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC	←

telt steeds maar voor één

Op de GR vind je de optie voor combinaties in hetzelfde menu als de optie voor permutaties. Op de TI en Casio worden combinaties weergegeven met nCr .

Ga na dat $\binom{5}{3} = 10$.

Voorbeeld

Frauke heeft tien boeken in de kast staan die ze al heeft gelezen. Ze besluit er drie weg te geven.

Hoeveel mogelijkheden zijn er

- a als ze drie vrienden elk één boek geeft
- b als ze één vriendin drie boeken geeft?

Aanpak

Er moeten drie boeken uit tien boeken gekozen worden. Dus je hebt te maken met permutaties of combinaties. Ga per situatie na of de volgorde van belang is.

Uitwerking

a aantal = $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ <..... De volgorde is van belang, dus permutaties.

b aantal = $\binom{10}{3} = 120$ <..... De volgorde is niet van belang, dus combinaties.

R26



Gaat het bij de volgende situaties om combinaties of om permutaties?

- a Uit een klas worden zes leerlingen gekozen om boodschappen te doen voor het schoolfeest.
- b In een klas worden vijf bioscoopbonnen verloot.
- c Een vereniging kiest uit haar leden een voorzitter, een secretaris en een penningmeester.
- d Uit een top tien stel je een eigen top drie samen.
- e Van 500 leerlingen komen er 300 naar het schoolfeest.

27

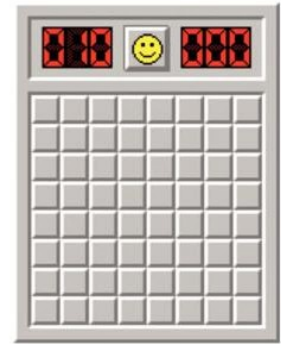


- a Uit een selectie van 18 spelers wordt een spelersraad van vier spelers samengesteld. Hoeveel spelersraden zijn mogelijk?
- b Bij de lotto kruist een deelnemer zes getallen aan uit de nummers 1 tot en met 45. Hoeveel zestallen zijn mogelijk?
- c Een toets bestaat uit 20 ja/nee-vragen. Hoeveel mogelijkheden zijn er om 15 juiste antwoorden aan te kruisen?
- d Op het onderdeel 100 meter sprint bij de Olympische Spelen behalen drie van de acht finalisten een medaille. Op hoeveel manieren kan dat?



28
□ ⊙ *

Bij het spel mijnenveger worden in het speelveld van 8×8 vakjes 10 mijnen geplaatst. Bij elke vakje bestaat de mogelijkheid dat er een mijn geplaatst is of niet. Hoeveel mogelijke opstellingen zijn er?



A29
□ ⊙ *

Op de boekenplank van Yvonne staan zes Engelse, vijf Franse en drie Duitse boeken.

- a Op hoeveel manieren kunnen deze 14 boeken gerangschikt zijn?
- b Sabine leent drie boeken van Yvonne. Hoeveel drietallen zijn er mogelijk?
- c Hoeveel drietallen zijn er mogelijk als Sabine een Engels, een Frans en een Duits boek wil lenen?
- d Hoeveel drietallen zijn mogelijk als Sabine drie Engelse boeken leent?

A30
*

Een tenniscoach wil een tweetal selecteren om deel te nemen aan een dubbelspeltoernooi. Zij kan kiezen uit 5 spelers. De coach vindt haar keuzes erg beperkt. Als zij uit dubbel zoveel spelers had mogen kiezen, hoeveel keer zoveel teams zou zij dan kunnen samenstellen?

E31
⊙ *

Bedenk een telprobleem waarbij het aantal mogelijkheden is

- a $\binom{7}{3}$
- b $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

O32
□ ⊙ *

Denise moet voor haar examendossier vijf Engelse en vier Duitse boeken lezen. De Engelse boeken kiest ze uit een lijst van 60 boeken en de Duitse uit een lijst van 40 boeken.

Op hoeveel manieren kan Denise

- a de vijf Engelse boeken kiezen
- b de vier Duitse boeken kiezen
- c de vijf Engelse en de vier Duitse boeken kiezen?

Theorie C Werken met permutaties en combinaties

In het volgende voorbeeld gebruik je de vermenigvuldigingsregel en de somregel, in een situatie waar je met permutaties en combinaties te maken hebt.

Voorbeeld

Aysha koopt graag een langspeelplaat (lp) van muziek die ze leuk vindt. Ze heeft een overzicht gemaakt van de genres van al haar platen, zie de tabel hiernaast.

Aysha leent een aantal lp's uit aan Kees.

Op hoeveel manieren kan dat als hij

- a drie of vier popplaten leent
- b in totaal vijf platen leent, waarvan drie rockplaten?

Aysha stelt een top-3 samen van haar favoriete platen.

- c Op hoeveel manieren kan dat als haar top-3 uit één genre bestaat?

genre	aantal
pop	9
rock	12
metal	5

Aanpak

- a Hij leent drie *of* vier popplaten, dus gebruik de somregel. Bij het lenen van platen is de volgorde niet van belang, dus het gaat om combinaties.
- b Hij leent drie rockplaten *en* twee niet-rockplaten, dus gebruik de vermenigvuldigingsregel.
- c Ze stelt een top-3 samen van pop *of* rock *of* metal, dus gebruik de somregel. Bij een top-3 is de volgorde van belang, dus het gaat om permutaties.

Uitwerking

a aantal = $\binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 210$

Er zijn 14 niet-rockplaten.

b aantal = $\binom{12}{3} \cdot \binom{14}{2} = 20020$

c aantal = $9 \cdot 8 \cdot 7 + 12 \cdot 11 \cdot 10 + 5 \cdot 4 \cdot 3 = 1884$



33

In de tabel zie je de verdeling naar leeftijd van een vierde klas.

Er wordt een klankbordgroep van vier leerlingen gekozen.

Hoeveel groepen zijn mogelijk

- a met twee 15-jarigen en twee 18-jarigen
- b met twee 15-jarigen en één 18-jarige
- c met drie of vier 17-jarigen
- d met allemaal leerlingen van dezelfde leeftijd?

Uit deze groep van 28 leerlingen worden er twee gekozen die het klassenuitje gaan voorbereiden. De eerste leerling organiseert de activiteit en de tweede leerling regelt het vervoer.

Hoeveel tweetallen zijn mogelijk als

- e één van de twee 17 jaar is
- f ze beide even oud zijn?

leeftijd	aantal
15	6
16	14
17	5
18	3

34
□ ⊙ *

In de tabel zie je de verdeling naar leeftijd van de volwassen mannen en vrouwen die in een flatgebouw wonen.

Voor een onderzoek worden acht van deze mensen geënquêteerd.

Hoeveel achttallen zijn er met

- a uitsluitend mannen
- b vier vrouwen
- c twee personen uit de jongste leeftijdsgroep en zes uit de oudste leeftijdsgroep
- d drie personen uit de middelste leeftijdsgroep
- e meer dan zes personen uit de jongste leeftijdsgroep?

Voor de Vereniging van Eigenaren wordt een bestuur gekozen bestaande uit een voorzitter, secretaris en penningmeester.

Hoeveel verschillende besturen zijn er mogelijk met

- f uitsluitend vrouwen
- g met iemand uit de oudste leeftijdsgroep als voorzitter?

LEEFTIJD BEWONERS FLATGEBOUW

	18 tot 25	25 tot 40	40 en ouder	
man	8	20	8	36
vrouw	12	16	5	33
	20	36	13	69

A35
□ ⊙ *

Smoothies worden gemaakt door ingevroren fruit, groenten en zuivelproducten in een blender te mixen tot een gladde substantie. Soms wordt hieraan nog een extra smaakstof toegevoegd, zoals bijvoorbeeld honing.

Bij de Smoothie-Beach-Bar kun je smoothies krijgen in drie maten: small, medium en large. Door ingrediënten te kiezen van de kaart hiernaast kun je zelf je smoothie samenstellen. Je kiest eerst een zuivelsoort. Deze vul je aan met één of meer van de overige ingrediënten.

- a Daniëlle wil een smoothie met drie fruitsoorten, twee groentesoorten en geen flavourshot. Hoeveel verschillende smoothies zijn er mogelijk?
- b Levi wil een large smoothie zonder yoghurt, met één of twee fruitsoorten, drie groente-soorten en één flavourshot. Hoeveel mogelijkheden zijn er voor hem?
- c Lise wil een kwarksmoothie met verder alleen maar groenten. Hoeveel mogelijkheden zijn er als zij minstens twee maar hoogstens vier groentesoorten wil?

INGREDIËNTEN SMOOTHIE

zuivel	fruit	groente	flavourshot
kwark	aardbei	avocado	karamel
melk	appel	bleekselderij	chocola
yoghurt	ananas	komkommer	kokos
	banaan	pompoe	hazelnoot
	bosbes	rode kool	honing
	framboos	spinazie	lemon
	mango	tomaat	mint
	peer	vijg	vanille
	perzik	wortel	
	kiwi		



36

*

Een groep van zeven studenten gaat samen koken en eten. Ze spreken af dat vier mensen de boodschappen doen en de rest gaat koken. Het stelletje Ivo en Sandra wil in ieder geval bij elkaar blijven. Op hoeveel manieren kan de groep die boodschappen gaat doen samengesteld worden?

A37

☐◎*

Restaurant MiniBurger serveert kleine hamburgerbroodjes met verschillende soorten beleg. Ondanks dat lang niet alle gerechten vlees bevatten, spreekt het restaurant toch bij elk soort broodje van een burger. Hieronder zie je welke drie typen burgers mogelijk zijn.

vlees	vis	vegetarisch
spicy chicken	fishburger	zeewierburger
Texas burger	knoflookgarnalen	zwarte bonenburger
serranoham	calamares	gegrilde groente
chorizo	gerookte zalm	asperges
	zeebaarsfilet	spinazie-kaasburger
		roergebakken groente

Stijn gaat lunchen bij MiniBurger, hij krijgt dan een aantal burgers naar keuze op één plank geserveerd. Stijn kiest altijd voor verschillende burgers. Op hoeveel manieren kan hij

- a twee vlees-, één vis- en twee vegetarische burgers kiezen
- b een volledig vegetarische lunch van vier of vijf burgers kiezen
- c één vegetarische burger en daarnaast drie visburgers of drie vleesburgers kiezen?

Het restaurant heeft vier keuzes voor een dessert.

- d Op hoeveel manieren kan Stijn een plank samenstellen van vier verschillende burgers en daarna al dan niet een dessert?

Het restaurant stelt een wekelijkse burger top-3 samen.

- e Op hoeveel manieren kunnen daar alleen maar burgers van één type op staan?



E38

◎*

Bedenk een telprobleem waarbij het aantal mogelijkheden is

a $\binom{6}{3} + \binom{5}{2}$

b $8 \cdot 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \cdot 3$.

Terugblik

Permutaties

Een permutatie is een rangschikking. Zo zijn ABC, ACB en CAB verschillende permutaties van de letters A, B en C.

Het totale aantal permutaties van deze letters is $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Het aantal permutaties van 3 dingen uit 7 dingen is $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$.

Met de GR kun je faculteiten en aantallen permutaties eenvoudig berekenen.

Combinaties

Kies je drie dingen uit zeven dingen zonder op de volgorde te letten, dan heb je te maken met een combinatie van 3 uit 7.

Het aantal combinaties van 3 uit 7 is $\binom{7}{3} = 35$.

Gebruik voor het berekenen van aantallen combinaties de optie op de GR.

Bij het aantal afvaardigingen van vier personen uit een klas van 25

leerlingen gaat het om combinaties. Het aantal is $\binom{25}{4} = 12\,650$.

Werken met permutaties en combinaties

In een klas zitten 13 jongens en 16 meisjes.

- Uit deze klas wordt een klankbordgroep van vijf leerlingen gekozen.

Het aantal groepen met minstens vier meisjes is

$$\binom{16}{4} \cdot \binom{13}{1} + \binom{16}{5} = 28\,028. \quad \text{4 meisjes en 1 jongen of 5 meisjes}$$

- Uit deze klas wordt een comité, bestaande uit een voorzitter, een secretaris en een penningmeester gekozen.

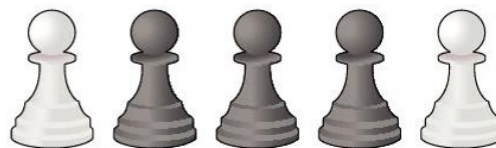
Het aantal comités dat bestaat uit leerlingen van uitsluitend hetzelfde geslacht is

$$13 \cdot 12 \cdot 11 + 16 \cdot 15 \cdot 14 = 5076. \quad \text{3 jongens of 3 meisjes}$$

4.3 Allerlei telproblemen

039
□ ⊙ *

Onno heeft vijf pionnen uit een schaakset op een rijtje gezet. Het zijn twee witte en drie zwarte pionnen. Hoeveel verschillende rijtjes kan hij maken?



Theorie A Het aantal rijtjes bestaande uit A's en B's

In opgave 39 werd gevraagd naar het aantal rijtjes met 2 witte en 3 zwarte pionnen. Je kunt dit probleem als volgt aanpakken.

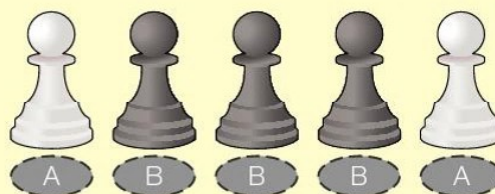
Er zijn vijf plekken waar de pionnen kunnen staan, waarbij op twee plekken een witte pion moet komen. Heb je de witte pionnen geplaatst, dan heb je verder geen keuzevrijheid meer. De drie zwarte pionnen komen immers op de overgebleven plekken te staan.

De vraag is dus op hoeveel manieren je voor de witte pionnen, twee plekken uit vijf plekken kunt kiezen. Omdat de volgorde niet van belang is, heb je te maken met combinaties. Het aantal manieren is dus

$$\binom{5}{2} = 10.$$

Je kunt soortgelijke problemen vertalen naar een situatie waarbij je een rijtje maakt met een zeker aantal A's en een zeker aantal B's.

In opgave 39 ging het om een rijtje van 2 A's (witte pionnen) en 3 B's (zwarte pionnen).



Maak je een rijtje van 2 A's en 3 B's dan is het aantal mogelijke rijtjes gelijk aan $\binom{2+3}{2} = \binom{5}{2} = 10$.

In plaats van eerst de 2 witte pionnen neer te zetten, kun je ook beginnen met het neerzetten van de 3 zwarte pionnen.

Zo zie je dat ook geldt $\binom{5}{3} = 10$.

En zo is het aantal rijtjes bestaande uit twee A's en zes B's gelijk aan $\binom{2+6}{2} = \binom{8}{2} = 28$ en ook aan

$$\binom{2+6}{6} = \binom{8}{6} = 28.$$

$$\begin{aligned} \binom{8}{2} &= \binom{8}{6} \\ \binom{10}{3} &= \binom{10}{7} \end{aligned}$$

Voorbeeld

Op een aanrecht staat een stapel van rode en witte borden.

Hoeveel verschillende stapels zijn er

- a met 5 rode borden en 7 witte borden
- b met in totaal 8 borden, waarvan 6 rode
- c in totaal mogelijk bij een stapel van 10 borden?

Uitwerking

a aantal = $\binom{12}{5} = 792$

b aantal = $\binom{8}{6} = 28$

c aantal = $2^{10} = 1024$ er zijn 2 mogelijkheden voor elk bord in de stapel



40



Willem gooit tien keer met een geldstuk.

Telkens noteert hij K (kop) of M (munt).

Een mogelijke serie is KKMMKMMMKK.

Hoeveel series zijn er

- a met acht keer kop
- b met vijf keer kop
- c in totaal mogelijk?

R41



Niet alle telproblemen zijn te vertalen naar een situatie waarbij je een rijtje maakt met een zeker aantal A's en B's.

Gegeven zijn de volgende situaties.

- 1 Lisa heeft een wachtwoord dat bestaat uit 3 enen en 5 nullen.
- 2 Bob wil boven de deur een rijtje van twee rode, twee witte en vier gele tegels zetten.
- 3 Een leeg fietsenrek wordt voor de helft gevuld door er vijf OV-fietsen in te zetten.
- 4 In een pincode van vier cijfers staan 3 vieren.

Geef aan welke van deze situaties zijn te vertalen naar rijtjes van A's en B's en bereken hierbij het aantal mogelijke rijtjes.

42



Voor een toelatingsexamen moeten 20 tweekeuzevragen worden beantwoord.

Een kandidaat wordt toegelaten als hij minstens 80% van de vragen juist beantwoordt.

Op hoeveel manieren kun je het formulier invullen om toegelaten te worden? Hoeveel procent is dat van het totale aantal manieren om het formulier in te vullen?

43
□ ⊙ *

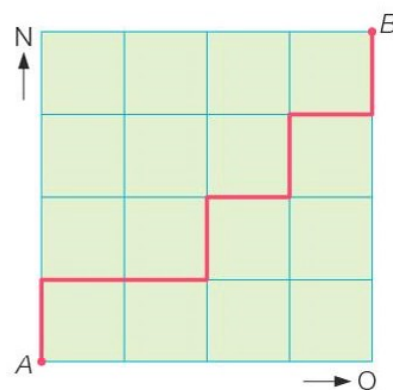
Van sommige steden bestaat de plattegrond uit een rechthoekig stratenplan. Op de foto zie je een stukje van zo'n plattegrond in Barcelona.



We bekijken routes zonder omwegen van A naar B .

De rode route geven we aan met NOONONON.

- Schrijf nog twee mogelijke routes van A naar B op.
- Hoeveel letters staan in een route van A naar B ? Hoe vaak staat de letter N daarbij?
- Hoeveel routes zijn er van A naar B ?



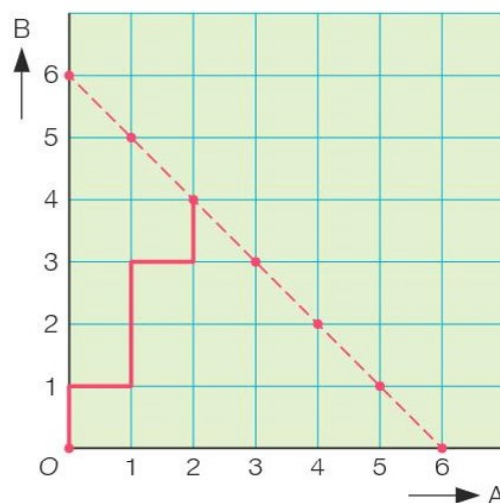
figuur 4.11

A44
□ ⊙ *

Bij een voetbalwedstrijd is zes keer gescoord. Een mogelijk scoreverloop bij de eindstand 2 - 4 is in figuur 4.12 aangegeven als een route in een rooster.

Hoeveel scoreverlopen zijn er

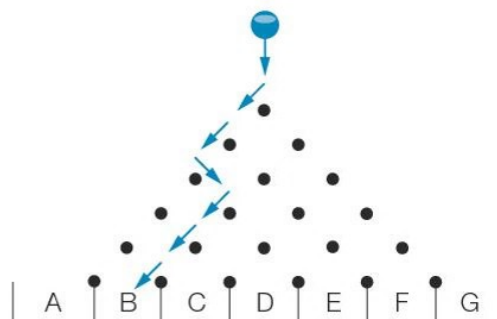
- mogelijk met de eindstand 2 - 4
- mogelijk met de eindstand 3 - 3
- mogelijk met de eindstand 5 - 1
- in totaal mogelijk?



figuur 4.12

A45

In de figuur zie je een schematische weergave van een bord van Galton. Een balletje valt op de bovenste pin. Iedere keer dat het balletje op een pin valt, valt het naar links of naar rechts. Eén mogelijke route is in de figuur getekend.



figuur 4.13

- a Vul in.
Om in bakje C te eindigen moet het balletje ... keer naar links en ... keer naar rechts vallen.
- b Hoeveel routes zijn er om in bakje C te eindigen?
- c Er zijn meer routes die in bakje D eindigen dan routes die in bakje B eindigen.
Hoeveel meer?

O46

Jori maakt een trein met een locomotief voorop en daarachter vier wagons. Hij heeft de keuze uit zes wagons met de nummers 3, 4, 5, 6, 7 en 8. Hieronder staan twee mogelijke opstellingen.



Door de wagons achter elkaar te plaatsen, ontstaat een getal van vier cijfers.

Jori vraagt zich af hoeveel verschillende treinen hij kan maken waarbij het getal dat ontstaat groter is dan 5500.

Hij onderscheid daarbij de volgende situaties

- Treinen met als eerste wagon een 6, 7 of 8.
- Treinen met als eerste wagon een 5 en als tweede wagon een 6, 7 of 8.

- a Licht toe waarom dit een handige aanpak is.
- b Bereken het aantal mogelijkheden bij elke situatie.
- c Bereken het totale aantal mogelijkheden.

Theorie B Telproblemen structureren

Bij telproblemen zoals in opgave 46 is het handig om een aantal situaties te onderscheiden voordat je gaat rekenen. Hiermee voorkom je dat je mogelijkheden vergeet mee te tellen. Heb je het aantal mogelijkheden per situatie berekend, dan gebruik je de somregel om het totale aantal mogelijkheden te krijgen.

Voorbeeld

Bij het spel Dominion kies je voordat het spel begint 10 verschillende kaarten. Het maakt niet uit in welke volgorde deze kaarten gekozen worden. Bij het spel kun je in totaal uit 26 kaarten kiezen. In de tabel zie je een overzicht van de verschillende soorten kaarten.

kaartsoort	overwinning	actie	aanval	verdediging
aantal	1	20	4	1

Mark wil een set van 10 kaarten kiezen die aan de volgende voorwaarden voldoen: als hij een aanvalskaat heeft gekozen, wil hij ook de verdedigingskaart hebben. Verder wil hij niet meer dan 2 aanvalskaarten hebben.

Bereken hoeveel mogelijke sets van 10 kaarten hij kan kiezen.

Uitwerking

0 aanvalskaarten

$$\text{aantal} = \binom{22}{10} = 646\,646$$

1 aanvalskaat en 1 verdedigingskaart

$$\text{aantal} = \binom{4}{1} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{21}{8} = 813\,960$$

2 aanvalskaarten en 1 verdedigingskaart

$$\text{aantal} = \binom{4}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{21}{7} = 2\,790\,720$$

Het totale aantal sets is $646\,646 + 813\,960 + 2\,790\,720 = 4\,251\,326$.

47
□ ◎ *

Janne geeft een dag in de week spinningles. Om de trainingsopbouw te ondersteunen maakt ze gebruik van muziek uit verschillende genres. In de tabel zie je een voorselectie waar ze uit wil kiezen.

genre	dance	pop	hip hop
aantal nummers	6	5	8



Haar les bestaat uit vijf fasen waaronder een warming up aan het begin en de cooling down aan het eind. Ze wil bij elke fase een verschillend muzieknummer kiezen en stelt daarvoor een playlist samen. Ze wil beginnen en eindigen met een popnummer en tussendoor afwisselend een dance- en een hip hopnummer gebruiken. Op hoeveel manieren kan ze een playlist samenstellen?

48
□

Een bedrijf codeert zijn artikelen met de letters A en B.

Een code van vijf letters is bijvoorbeeld BAABA.

- Hoeveel codes van zeven letters zijn er met minstens vijf A's?
- Hoeveel codes van zes letters zijn er die meer A's dan B's bevatten?
- Hoeveel codes van negen letters zijn er in totaal?

49
□ ⊙ *

Bij een bordspel schrijft elke speler in het geheim een aantal commando's op een rijtje. Spelers kunnen kiezen uit het commando links of het commando rechts.

- a Jeroen wil drie keer links en vijf keer rechts, maar hij weet nog niet in welke volgorde.
Hoeveel mogelijkheden heeft hij?
- b Arda wil twee keer het commando links, maar ze twijfelt nog of ze in totaal zeven of acht commando's moet opschrijven.
Hoeveel mogelijkheden heeft zij?
- c Bij een uitbereiding van het spel is ook het commando midden mogelijk.
Hoeveel mogelijkheden zijn er dan om een rijtje van zes commando's op te schrijven?

50
□ ⊙

Elsbeth gooit met vijf dobbelstenen. Ze vraagt zich af hoeveel mogelijkheden er zijn om in totaal 28 ogen te gooien. Ze bedenkt dat 'drie zessen en twee vijven' een van de mogelijke situaties is.



- a Wat is de andere situatie om in totaal 28 ogen te gooien?
- b Bereken bij beide situaties het aantal mogelijkheden.
- c Wat is het totaal aantal mogelijkheden om met vijf dobbelstenen 28 ogen te gooien?

A51
□ ⊙ *

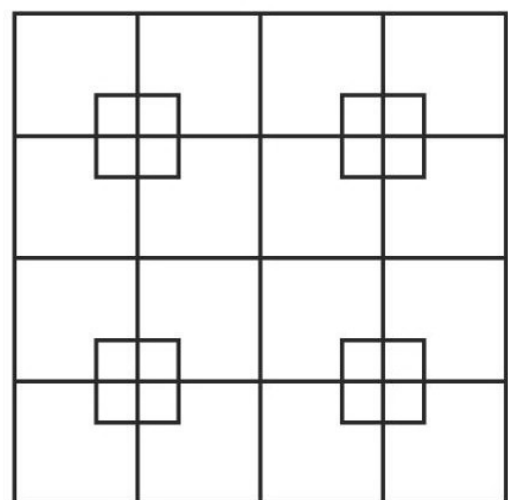
- a André gooit met vier dobbelstenen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om in totaal zes ogen te gooien?
- b Julia gooit met zes dobbelstenen.
Hoeveel mogelijkheden zijn er om in totaal 34 ogen te gooien?

E52
*

Er moet een trein gemaakt worden door achter een locomotief vijf wagons (A, B, C, D en E) te plaatsen. Wagon A moet dichterbij de locomotief komen dan wagon B.
Op hoeveel manieren kan deze trein gemaakt worden?

O53
□ ⊙ *

Hoeveel vierkanten zijn er in figuur hiernaast te ontdekken?



figuur 4.14

Theorie C Probleemoplossen bij telproblemen

Veel telproblemen passen niet precies bij één van de technieken die je in dit hoofdstuk hebt geleerd. Om deze problemen op te lossen bedenkt je eerst een mogelijke aanpak.

Een mogelijke aanpak bedenken leer je door veel te puzzelen op de opgaven. Je leert veel meer van het zoeken naar het antwoord dan van het antwoord zelf.

De volgende tips kunnen van pas komen als je klem zit.

- Herken je in de opgave iets uit een eerder opgelost telprobleem? Neem je oude aanpak als uitgangspunt.
- Kun je een begin maken met het noteren van een aantal mogelijkheden? Gebruik daarbij eventueel een schema of een diagram.
- Kun je een kleinere of makkelijkere variant van het telprobleem bedenken? Probeer eerst die variant op te lossen.

In de opgaven komen verschillende soorten telproblemen voor. Houd bij het oplossen steeds bovenstaande tips in je achterhoofd. In het voorbeeld staan deze drie tips in de aanpak genoemd. Vaak heb je echter aan een van de tips genoeg.

Voorbeeld

Hoeveel driehoeken zijn er in figuur hiernaast te ontdekken?

Aanpak

- Herken je in de opgave iets uit een eerder opgelost telprobleem? Neem je oude aanpak als uitgangspunt.
Ja, probeer de aanpak van opgave 53 bij dit probleem.
- Kun je een begin maken met het noteren van een aantal mogelijkheden? Gebruik daarbij eventueel een schema of een diagram.

Er zijn driehoeken van vier verschillende groottes.

Tel de driehoeken van klein naar groot. Tel ze per soort.

- Kun je een kleinere of makkelijkere variant van het telprobleem bedenken? Probeer eerst die variant op te lossen.

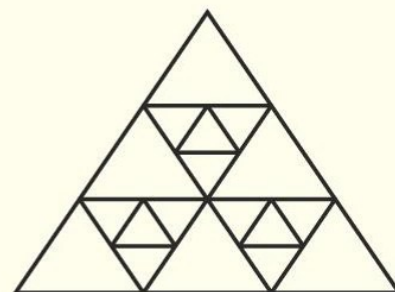
In de situatie van figuur 4.16a zijn er

4 kleine + 1 grotere = 5 driehoeken.

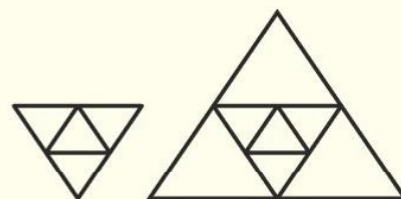
In de situatie van figuur 4.16b zijn er

4 kleine + 4 grotere + 1 grootste = 9 driehoeken.

De volgende stap is het hele telprobleem oplossen.



figuur 4.15



a b
figuur 4.16

Uitwerking

Door de driehoeken per soort van klein naar groot te tellen, krijg je aantal = $12 + 9 + 3 + 1 = 25$.

Geef een toelichting bij je aanpak.

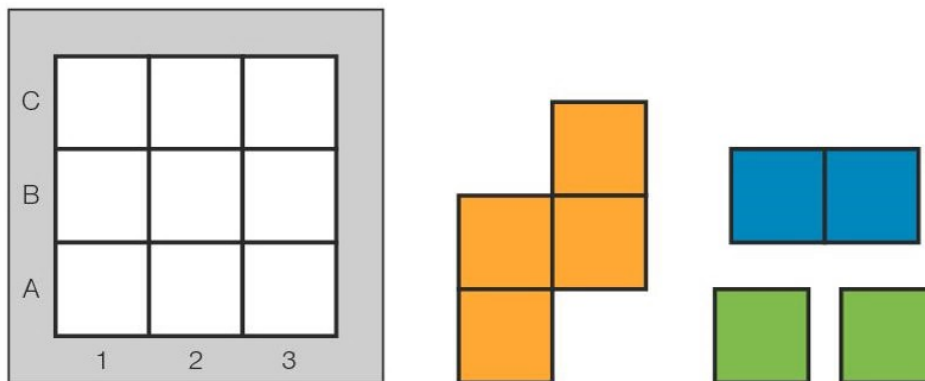
- 54** Bij een toernooi met 10 spelers en 2 scheidsrechters schudt iedereen elkaar voor de wedstrijd de hand.
Hoe vaak worden er handen geschud?

- 55** Een bedrijf met zes kantoren neemt twaalf nieuwe medewerkers aan.
Op hoeveel manieren kunnen deze medewerkers verdeeld worden over de zes kantoren? Het kan dus voorkomen dat de twaalf nieuwe werknemers op één kantoor komen.

- 56** Acht vrienden spelen het spel saboteur, waarbij 2 of 3 spelers in het geheim saboteurs zijn. De saboteurs proberen de gewone spelers tegen te werken.
Op hoeveel manieren kunnen de 8 rollen worden verdeeld?



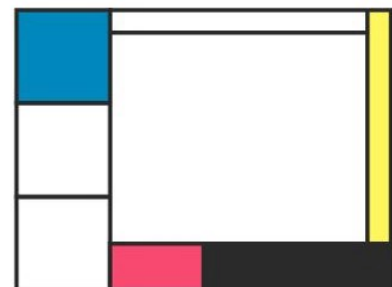
- 57** Zie de figuur hieronder. Jim vraagt zich af op hoeveel manieren hij de vier stukken op het 3 bij 3 rooster kan leggen. De stukken zijn gekleurd aan de bovenzijde, maar hebben een witte achterkant. Jim wil alle stukken op het rooster leggen met de gekleurde zijde naar boven.
Bereken op hoeveel verschillende manieren dit kan.



figuur 4.17

- 58** Levi gaat een hardloopschema maken. Hij wil iedere week drie dagen hardlopen, telkens op dezelfde dagen. Hij wil nooit twee dagen achter elkaar hardlopen.
Hoeveel verschillende schema's kan Levi maken?

- 59** Tijdens een ckv-les kleuren de leerlingen de vlakverdeling hiernaast. Van de acht rechthoeken moeten er vier gekleurd worden met rood, geel, blauw en zwart. Elke kleur moet één keer gebruikt worden. De andere rechthoeken blijven wit. Zo ontstaat een Mondriaan-compositie.
Hoeveel composities zijn mogelijk?



figuur 4.18

60
□ ⊙ *

In de figuur hiernaast zie je het kunstwerk Acceptatie nr. 2 van kunstenaar Willy Alferink. De sculptuur bestaat uit vijf gestapelde bollen die van onder naar boven in diameter afnemen. Twee van deze bollen zijn geschilderd in roodtinten, twee in blauwtinten en één in groentinten. Willy Alferink heeft ervoor gekozen om de onderste bol in roodtinten te schilderen, de bol daarboven in blauwtinten, enzovoort. Hij had ook voor een andere volgorde van de kleuren kunnen kiezen. Hoeveel verschillende volgorden zijn er met twee rode, twee blauwe en één groene bol als twee bollen boven elkaar niet dezelfde kleur mogen hebben?



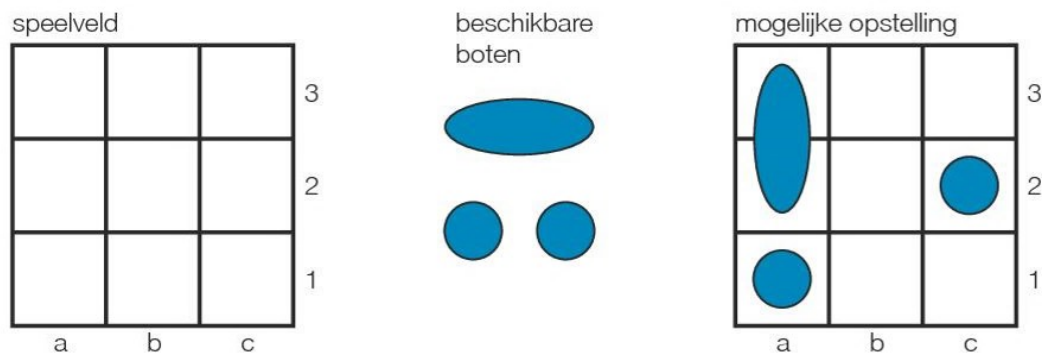
Bron: www.willyalferink.nl

61
□ ⊙ *

Julia heeft munten van 20 cent, van 50 cent en van 1 euro in haar portemonnee. Van elk heeft ze er zes. Op hoeveel manieren kan ze hiermee 2,20 euro betalen?

62
□ ⊙ *

Meneer Kieboom is een fanatiek speler van het spel zeeslag. Op vakantie speelt hij vaak een vereenvoudigde versie van het spel. Bij deze versie plaats je één boot van twee hokjes en twee bootjes van 1 hokje op een veld van 3 bij 3 hokjes, zoals in de figuur hieronder. De boot van twee hokjes mag niet diagonaal geplaatst worden.



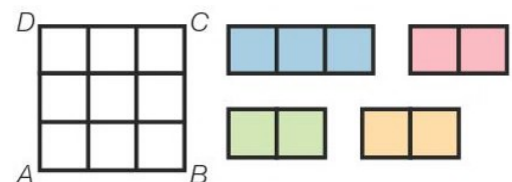
figuur 4.19

Onderzoek op hoeveel manieren meneer Kieboom zijn boten kan plaatsen.

63
⊙ *

Sanne heeft op een stuk papier een 3 bij 3 vierkant $ABCD$ getekend. Ze heeft vier losse stukjes papier met verschillende kleuren. Een stukje van 1 bij 3 en drie verschillende stukjes van 1 bij 2.

Op hoeveel manieren kan Sanne het hele vierkant bedekken met de stukjes gekleurd papier?



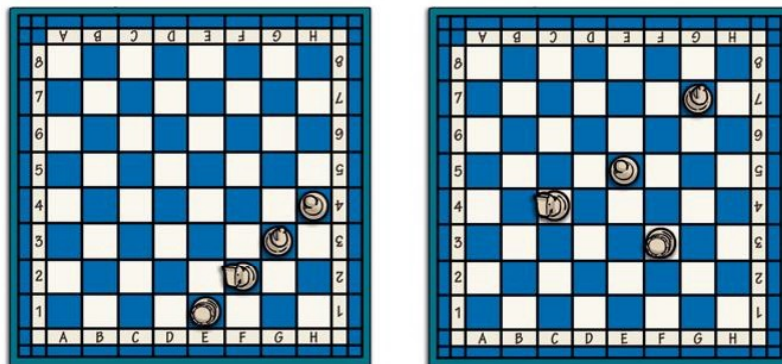
figuur 4.20

64

*

Harm wil van de witte schaakstukken een paard, een loper, een toren en een pion op een schaakbord van 8 bij 8 velden plaatsen zodat in elke rij en in elke kolom hoogstens één stuk staat.

Op hoeveel manieren kan dit?



figuur 4.21

65

*

Bij een spel moeten Mitchel en Pieter de buit van 5 goudstukken en 10 zilverstukken verdelen. De enige eis is dat elke speler iets moet krijgen.

Op hoeveel manieren kunnen ze de buit verdelen?



66

*

Op het startscherm van de smartphone van Elske is in een 4×4 rooster plaats voor 16 icoontjes van apps. Elske gebruikt niet alle 16 plaatsen. Zij heeft de 12 icoontjes van haar meest gebruikte apps op het homescreen gerangschikt.

- Op hoeveel manieren kan dit?
- Op hoeveel manieren kan dit als ze de linker kolom leeg laat?
- Op hoeveel manieren kan dit als ze in elke rij één plaats leeg laat?

Elske wil de 4 icoontjes van haar socialmedia-apps op één rij of in één kolom. Verder maakt het haar niet uit.

- Hoeveel mogelijkheden zijn er?



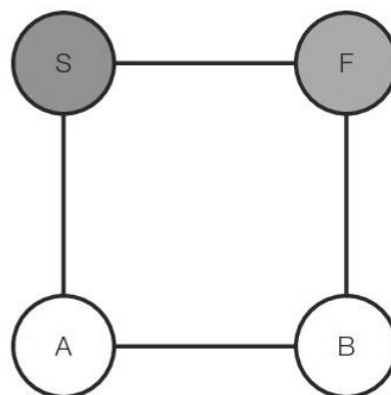
67

*

Hiernaast zie je een spelbord. Het spel begint met het plaatsen van een pion op S (Start). Bij elke zet wordt de pion over een lijntje verschoven. Zodra de pion op F (Finish) komt eindigt het spel.

De bedoeling is de pion in precies 13 zetten van S naar F te krijgen.

Op hoeveel manieren kan dat?

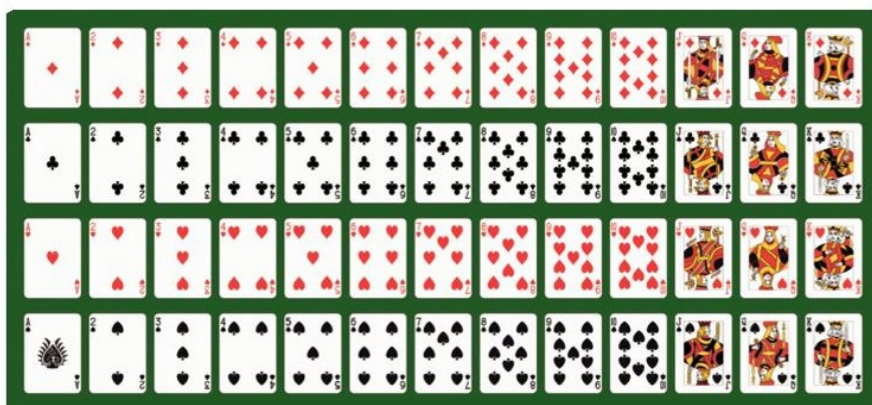


figuur 4.22

68

*

Bij poker wordt een spel met 52 kaarten gebruikt. Zie de figuur hieronder voor een overzicht van deze kaarten.



figuur 4.23

In de vier rijen zie je de verschillende soorten kaarten: ruiten, klaveren, harten en schoppen. Van elke soort kaarten zijn er 13 verschillende waarden: A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K.

Bij poker draait het spel om een set van vijf kaarten. Een voorbeeld daarvan is full house, dat is een drietal kaarten van dezelfde waarde met nog een tweetal kaarten van een andere gelijke waarde, zoals hiernaast.

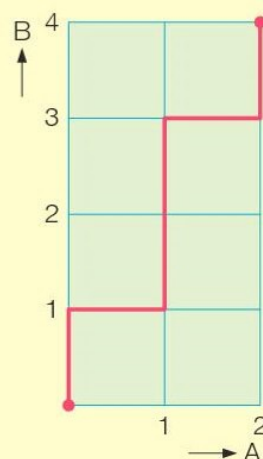
Hoeveel verschillende mogelijkheden zijn er voor full house? Hoeveel procent is dit van het totale aantal mogelijke sets van vijf kaarten?



Terugblik

Rijtes met A's en B's

- Het aantal rijtes met drie A's en zeven B's is $\binom{10}{3}$ en ook $\binom{10}{7}$.
- Het aantal rijtes met tien hokjes waarbij elk hokje gevuld is met een A of een B is 2^{10} .
- Bij het tien keer gooien met een geldstuk is het aantal series met drie keer munt (en dus zeven keer kop) gelijk aan $\binom{10}{3}$.
- Het aantal scoreverlopen van de stand 0 - 0 naar de stand 2 - 4 is gelijk aan het aantal rijtes met 2 A's en 4 B's oftewel $\binom{2+4}{2} = \binom{6}{2}$ en ook $\binom{6}{4}$.



Telproblemen structureren

Het berekenen van het aantal rijtes bestaande uit 3 A's en 3 B's, waarbij niet twee A's in het midden mogen staan, is niet eenvoudig. Daarom is het belangrijk eerst de mogelijke situaties te onderscheiden, voor je begint met een berekening. Als er geen twee A's in het midden mogen staan, zijn de mogelijkheden voor de derde en vierde letter: AB, BB of BA. Dat zijn dus 3 situaties:

__ A B __ nog 2 A's en 2 B's, dus aantal = $\binom{4}{2} = 6$

__ B B __ nog 3 A's en 1 B, dus aantal = $\binom{4}{1} = 4$

__ B A __ nog 2 A's en 2 B's, dus aantal = $\binom{4}{2} = 6$

Het totale aantal mogelijke rijtes is dus $6 + 4 + 6 = 16$.

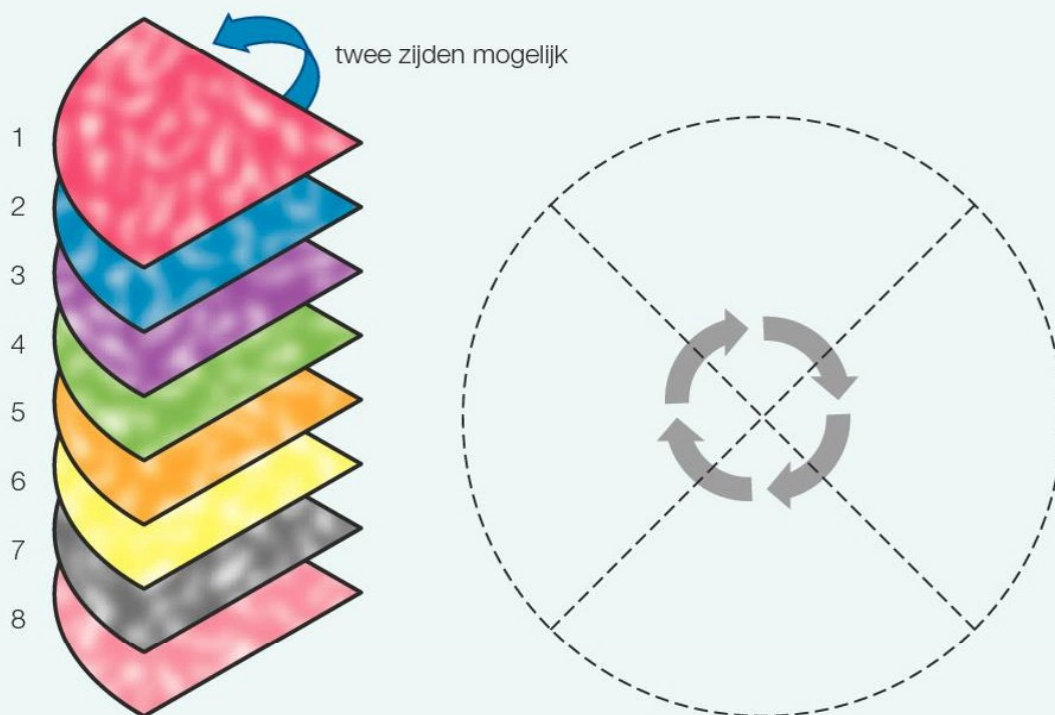
Probleemoplossen bij telproblemen

Veel telproblemen passen niet precies bij één van de technieken die je in dit hoofdstuk hebt geleerd. Om deze problemen op te lossen bedenk je eerst een mogelijke aanpak. Lukt het niet om een mogelijke aanpak te bedenken? Dan kunnen de volgende tips van pas komen.

- Herken je in de opgave iets uit een eerder opgelost telprobleem? Neem je oude aanpak als uitgangspunt.
- Kun je een begin maken met het noteren van een aantal mogelijkheden? Gebruik daarbij eventueel een schema of een diagram.
- Kun je een kleinere of makkelijkere variant van het telprobleem bedenken? Probeer eerst die variant op te lossen.

Eindopdracht Cirkelvormig spelbord

Het spelbord in deze opdracht is cirkelvormig met vier plaatsen waarop een tegel (in de vorm van een kwartcirkel) gelegd kan worden. Voor het spel is het belangrijk welke tegels er opeenvolgend liggen. Het is echter niet van belang hoe het spelbord op tafel ligt: het spelbord bijvoorbeeld een kwartslag draaien, verandert niets aan het spel. Bij het spel worden acht verschillende tegels geleverd die op beide zijden uniek bedrukt zijn.



De maker van het spel wil op de doos benadrukken hoeveel verschillende spelborden er mogelijk zijn.

- Bereken dit aantal verschillende spelborden.

Bij haar ontwerp heeft de maker van het spel nog een aantal opties achter de hand gehouden om de variatie in het spel nog groter te maken. Zo overweegt zij een uitbreiding waarbij twee verschillende fiches geplaatst worden op twee aangrenzende kwartcirkels van het spelbord.

- Bereken hoeveel keer zoveel mogelijke spelborden een speler met de uitbreiding heeft.

Zoals je gezien hebt, levert een uitbreiding van het spel met twee fiches al veel extra mogelijkheden op.

- Bedenk zelf een uitbreiding van het spel, waarbij het aantal mogelijkheden is te berekenen met de technieken uit dit hoofdstuk. Daag een klasgenoot uit om dit aantal mogelijkheden te berekenen.

Diagnostische toets

4.1 Regels bij telproblemen

- 1** In de supermarkt kan Jeroen kiezen uit vijf soorten pasta, vier verschillende sauzen en drie soorten groenten. Hij stelt een gerecht samen met één soort pasta, één soort saus en één soort groente.

- a** Op hoeveel manieren kan dat?
- b** Spaghetti en linguine zijn twee van de beschikbare soorten pasta, maar Jeroen wil graag een andere soort. Verder wil hij courgette als groente. Op hoeveel manieren kan hij dan een gerecht samenstellen?

- 2** Een bedrijf gebruikt artikelcodes van vijf cijfers. Hoeveel codes zijn er mogelijk als deze

- a** geen nullen bevat
- b** met een 3 begint en eindigt
- c** uit vijf verschillende cijfers bestaat
- d** uit vijf dezelfde cijfers bestaat?

- 3** Bij een schaakvereniging worden uit de 19 leden willekeurig twee leden gekozen om tegen elkaar te spelen. De speler die als eerste gekozen wordt speelt met wit, de ander met zwart. In de tabel zie je hoeveel jongens en meisjes lid zijn en wat hun favoriete opening is. Hoeveel tweetallen zijn mogelijk waarbij

favoriete opening	jongen	meisje
de Caro-Kann	3	6
het damegambiet	4	2
de Siciliaanse	2	2

- a** een jongen met wit en een meisje met zwart speelt
- b** beide spelers jongens of beide spelers meisjes zijn
- c** beide spelers niet het damegambiet als favoriete opening hebben
- d** beide spelers dezelfde favoriete opening hebben?



4.2 Permutaties en combinaties

- 4** Christel kijkt acht video's op YouTube.

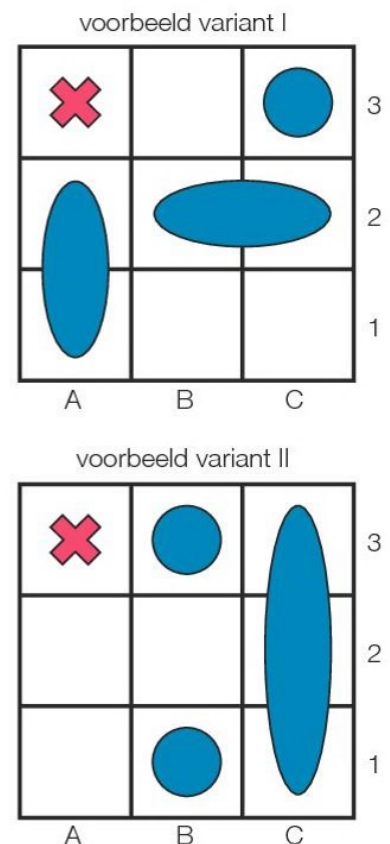
- a** Hoeveel volgordes zijn daarbij mogelijk?
- b** Ze geeft vijf van de video's een like. Op hoeveel manieren kan dat?
- c** Ze deelt een van de video's met haar zusje, een andere met haar broer en weer een andere met een vriendin. Op hoeveel manieren kan dat?

- 5** De redactie van een schoolkrant bestaat uit zes vierdeklassers en acht vijfdeklassers.
- a** Er wordt een groep van vijf leerlingen uit de redactie gekozen die onderzoek gaan doen voor een artikel over de nieuwe directie. Hoeveel groepen zijn mogelijk met twee vierdeklassers?
 - b** Uit de redactie wordt een hoofdredacteur, een beeldredacteur, een distributeur en een opmaker gekozen. Op hoeveel manieren kan dat als ze uitsluitend uit hetzelfde leerjaar komen?
 - c** Een docent komt op bezoek bij de redactie, zij wordt rondgeleid door een groep van drie redactieleden. Op hoeveel manieren kan die groep worden samengesteld als er minstens één vijfdeklasser bij zit?

4.3 Allerlei telproblemen

- 6** Jan gooit elf keer met een geldstuk. Hoeveel mogelijkheden zijn er
- a** om zes keer kop te gooien
 - b** in totaal
 - c** om hoogstens twee keer munt te gooien?
- 7** Tim en Stijn spelen tafelvoetbal. Het spel is voorbij als er tien doelpunten gemaakt zijn. Een mogelijk scoreverloop is 1-0, 2-0, 3-0, 3-1, 3-2, ..., 7-2, 7-3.
- a** Hoeveel scoreverlopen zijn er in totaal mogelijk?
 - b** Hoeveel scoreverlopen eindigen in een gelijke stand?
 - c** Tim scoort de eerste drie doelpunten, maar Stijn weet toch te winnen. Hoeveel scoreverlopen zijn er voor deze wedstrijd mogelijk?

- 8** Adriana en Adriaan spelen het spel zeeslag op een veld van 3 bij 3 hokjes. Voor het plaatsen van de boten hebben ze twee varianten bedacht. Bij variant I plaatsen spelers een horizontale en een verticale boot van lengte 2 en een boot van lengte 1. Bij variant II plaatsen spelers een boot van lengte 3, die zowel horizontaal als verticaal geplaatst mag worden, en twee boten van lengte 1. Beide spelers weten dat de ander altijd het vakje A3 als eerste bombardeert, dus ze plaatsen daar nooit een boot. Onderzoek bij welke variant de meeste opstellingen mogelijk zijn.



figuur 4.24